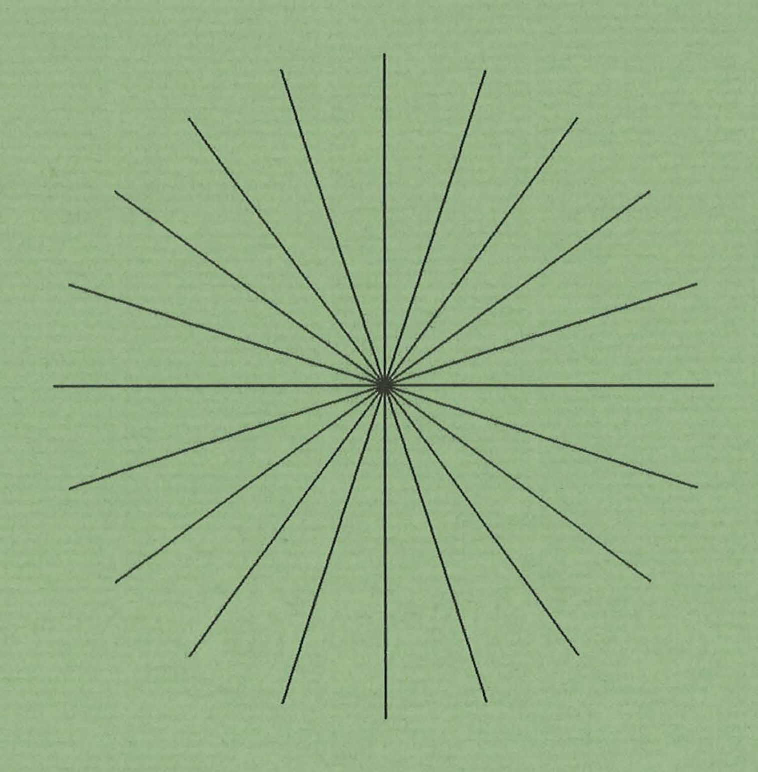
ÁLGEBRA LINEAL (II)

APLICACIONES LINEALES

por

SONIA LUISA RUEDA



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-78-02

ÁLGEBRA LINEAL (II)

APLICACIONES LINEALES

por

SONIA LUISA RUEDA

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-78-02

C U A D E R N O S
D E L I N S T I T U T O
J U A N D E H E R R E R A

NUMERACIÓN

3 Área
78 Autor
02 Ordinal de cuaderno (del autor)

TEMAS

0 VARIOS
1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN

Álgebra lineal II.
Aplicaciones lineales
2009 Sonia Luisa Rueda
Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Lucía Alba Fernández
CUADERNO 270.01/ 3-78-02
ISBN-13 (obra completa): 978-84-9728-285-7
ISBN-13: 978-84-9728-287-1
Depósito Legal: M-6261-2009

Este es el segundo volumen de la serie:

- Álgebra Lineal I: Espacios Vectoriales
- Álgebra Lineal II: Aplicaciones Lineales

En este segundo cuadernillo de la serie se empieza estableciendo algunos conceptos básicos y parte de la notación que se utilizará en todo el cuadernillo. El primer tema establece las definiciones y resultados básicos sobre aplicaciones lineales. El segundo tema trata la diagonalización de endomorfismos. Finalizamos con una colección de ejercicios resueltos que amplian el conjunto de ejemplos que se presentan junto con el desarrollo de la materia.

Por limitaciones de espacio no incluimos demostraciones de los resultados que aparecen en este cuadernillo. Recomendamos al lector interesado en dichas demostraciones la lectura de alguno de los libros enumerados en la bibliografía.

Índice

1

Preliminares

1.1 Aplicaciones entre conjuntos

Sean A, B y C conjuntos no vacíos.

Definición 1.1.1. *Una* **aplicación** $f : A \to B$ *es una correspondencia que a cada elemento de* A *le asocia un único elemento de* B*. El conjunto* A *recibe el nombre de* **dominio** *de la aplicación* f *y el conjunto* B *el de* **rango** *de* f*.*

Dado $a \in A$ se denota por $f(a)$ al elemento imagen de a en B mediante la aplicación f. La **imagen** de f es el conjunto

$$\mathrm{Im}(f) = f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}.$$

El conjunto **imagen inversa** de un elemento $b \in B$ es el conjunto

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}.$$

Se llama **aplicación identidad** en A a la aplicación $\mathrm{id}_A : A \to A$ definida por $\mathrm{id}_A(a) = a$ para todo $a \in A$.

Definición 1.1.2. *Dadas dos aplicaciones* $f : A \to B$ *y* $g : B \to C$ *se llama* **composición** *de* f *con* g *a la aplicación* $g \circ f : A \to C$ *definida por* $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ *para todo* $a \in A$*.*

Definición 1.1.3. *Dada una aplicación $f : A \rightarrow B$ se dice que f es:*

1. **Inyectiva** *si dados dos elementos distintos de A sus imágenes mediante f son distintas. Esto es*

$$\forall a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2).$$

   Equivalentemente,

$$si\ \exists a_1, a_2 \in A\ tales\ que\ f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2.$$

2. **Sobreyectiva** *si todo elemento de B es imagen mediante f de un elemento de A. Es decir, $f(A) = B$,*

$$\forall b \in B, \exists a \in A\ tal\ que\ f(a) = b.$$

3. **Biyectiva** *si es inyectiva y sobreyectiva.*

Definición 1.1.4. *Dada un aplicación $f : A \rightarrow B$ biyectiva se llama aplicación* **inversa** *de f a la aplicación $f^{-1} : B \rightarrow A$ definida como sigue:*

$$\forall b \in B, f^{-1}(b) = a\ si\ f(a) = b\ con\ a \in A.$$

Se verifica que $f^{-1} \circ f = id_A$ y que $f \circ f^{-1} = id_B$.

1.2 Matrices

Sea K un cuerpo, se denota por $\mathcal{M}_{m \times n}(K)$ al conjunto de las matrices de tamaño $m \times n$ (m filas y n columnas) y elementos en K.

Se denota por I_n a la **matriz identidad** de tamaño $n \times n$ de $\mathcal{M}_{n \times n}(K)$,

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Dada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$, si $\det(A) \neq 0$ existe la matriz **inversa** A^{-1} de A y verifica

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Si $A = (a_{ij})$ con $i, j = 1, \ldots, n$, es decir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

se denota por A_{ij} a la submatriz de A que resulta de eliminar la fila i y la columna j de A. Entonces $A^{-1} = (c_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, n$ donde

$$c_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{\det(A)} \det(A_{ji}).$$

1.3 Raices de polinomios y su multiplicidad

Sea $K[x]$ el conjunto de los polinomios en x con coeficientes en el cuerpo K.

Definición 1.3.1. *Sea $p(x)$ un polinomio de $K[x]$. Un escalar $\lambda \in K$ es una* **raiz** *de $p(x)$ si $p(\lambda) = 0$.*

Equivalentemente, λ es una raiz de $p(x)$ si y sólo si $(x - \lambda)$ divide a $p(x)$, es decir, existe un polinomio $q(x) \in K[x]$ tal que

$$p(x) = (x - \lambda)q(x).$$

Definición 1.3.2. *Sea λ una raiz del polinomio $p(x)$. Se llama* **multiplicidad** *de λ al mayor número natural m tal que $(x - \lambda)^m$ divide a $p(x)$, es decir*

$$p(x) = (x - \lambda)^m q(x), \quad q(x) \in K[x].$$

Si $K = \mathbb{C}$ entonces todo polinomio de grado mayor o igual que uno tiene todas sus raices en $\mathbb{C}$. Se dice que $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado. Sin embargo, $\mathbb{R}$ no es algebraicamente cerrado, existen polinomios en $\mathbb{R}[x]$ que no tienen raices en $\mathbb{R}$. Por ejemplo, $x^2 + 1$ tiene coeficientes reales pero sólo tiene raices complejas.

Proposición 1.3.3. *Sea $p(x) \in K[x]$ un polinomio de grado n cuyas raices en K son $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ con multiplicidades $m_1, \ldots, m_p$ respectivamente. Entonces:*

1. *Existe $q(x) \in K[x]$ tal que $p(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_p)^{m_p} q(x)$ y así $m_1 + \cdots + m_p \leq n$.*

2. *Si $K = \mathbb{C}$ todas las raices de $p(x)$ son complejas y por tanto*

$$p(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_p)^{m_p} \text{ con } m_1 + \cdots + m_p = n.$$

2

Aplicaciones Lineales

Sean V y W espacios vectoriales sobre el cuerpo K.

2.1 Definición de aplicación lineal

Definición 2.1.1. *Una aplicación $f : V \to W$ es una* **aplicación lineal** *(u homomorfismo) si verifica*

$$\forall u, v \in V, \; f(u+v) = f(u) + f(v),$$
$$\forall \lambda \in K, \; f(\lambda u) = \lambda f(u).$$

Esta condición es equivalente a

$$\forall u, v \in V, \; \forall \lambda, \mu \in K, \; f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

Una aplicación lineal $f : V \to W$ en la que $W = V$ recibe el nombre de **endomorfismo**.

Ejemplo 2.1.2. *La aplicación $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por*

$$f(x, y, z) = (2x - y + 4z, 3x - z, 6x + y)$$

es lineal.

También es lineal toda aplicación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *definida por*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (\sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \sum_{i=1}^{n} b_i x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} l_i x_i),$$

con $a_i, b_i, \ldots, l_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$.

Proposición 2.1.3. *Sea* $f : V \to W$ *una aplicación lineal. Dado un conjunto* $\{u_1, \ldots, u_m\}$ *de vectores de* V *se verifican las siguientes afirmaciones:*

1. *Dados* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$ *entonces* $f(\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i) = \sum_{i=1}^m \lambda_i f(u_i)$. *En particular* $f(0_V) = 0_W$ *y* $f(-u) = -f(u)$, $\forall u \in V$.

2. *Si* $\{u_1, \ldots, u_m\}$ *es linealmente dependiente entonces* $\{f(u_1), \ldots, f(u_m)\}$ *es linealmente dependiente.*

3. *Si* $\{f(u_1), \ldots, f(u_m)\}$ *es linealmente independiente entonces* $\{u_1, \ldots, u_m\}$ *es linealmente independiente. El recíproco no es cierto, en general, la independencia lineal de vectores no es una propiedad que se conserve mediante aplicaciones lineales, véase el ejemplo 2.1.4,(1).*

4. *Si* U *es un subespacio vectorial de* V *con base* $\{u_1, \ldots, u_m\}$ *entonces* $f(U) = \langle f(u_1), \ldots, f(u_m) \rangle$. *Esto es* $\{f(u_1), \ldots, f(u_m)\}$ *es sistema generador de* $f(U)$ *pero puede no ser una base de* $f(U)$, *véase el ejemplo 2.1.4,(2).*

Ejemplos 2.1.4. *Se considera la aplicación lineal* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definida por*

$$f(x, y, z) = (x, y).$$

1. *Los vectores* $v_1 = (1, 0, 0)$ *y* $v_2 = (0, 1, 0)$ *son linealmente independientes y también lo son sus imágenes* $f(v_1) = (1, 0)$ *y* $f(v_2) = (0, 1)$. *Sin embargo, los vectores* $u_1 = (1, 0, 1)$ *y* $u_2 = (2, 0, 0)$ *son linealmente independientes pero sus imágenes* $f(u_1) = (1, 0)$ *y* $f(u_2) = (2, 0)$ *son linealmente dependientes.*

2. *Dado el subespacio* $U = \langle u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (2, 0, 0) \rangle$ *con* $\dim U = 2$ *de* $\mathbb{R}^3$ *se tiene que* $f(U) = \langle f(u_1), f(u_2) \rangle = \langle (1, 0) \rangle$ *y por tanto* $\dim f(U) = 1$.

2.2 Matriz asociada a una aplicación lineal

Proposición 2.2.1. *Sea* $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *es una base de* V *y* $\{w_1, \ldots, w_n\}$ *un conjunto de vectores de* W. *Entonces existe una única aplicación lineal* $f : V \to W$ *tal que*

$$f(v_1) = w_1, \ldots, f(v_n) = w_n.$$

Ejemplo 2.2.2. *Sea* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ *una aplicación lineal de la que se sabe que:*

$$f(1,0,0) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, f(0,1,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix},$$

$$f(0,0,1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Por la proposición anterior, existe una única aplicación lineal que cumple estas condiciones. Dicha aplicación está definida por:

$$f(x,y,z) = xf(1,0,0) + yf(0,1,0) + zf(0,0,1) =$$

$$= \begin{pmatrix} 3x + y + 2z & x - y - 2z \\ 2x - 5y - 3z & 4x + 5y + 4z \end{pmatrix}.$$

Definición 2.2.3. *Sea* $B_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *una base de* V *y sean* $(x_1, \ldots, x_n)$ *las coordenadas de un vector de* V *en la base* B_V. *Sea* $B_W = \{w_1, \ldots, w_m\}$ *una base de* W *y sean* $(y_1, \ldots, y_m)$ *las coordenadas de un vector de* W *en la base* B_W.

Supongamos que $f : V \to W$ *es una aplicación lineal tal que*

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \ldots + a_{mj}w_m,$$

esto es, las coordenadas de $f(v_j)$ *en la base* B_W *son* $(a_{1j}, \ldots, a_{mj})$. *La* **expresión**

matricial de f *en las bases* B_V *de* V *y* B_W *de* W *es*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Se dice que $A = (a_{ij})$ *es la* **matriz de la aplicación lineal** f *respecto de las bases* B_V *de* V *y* B_W *de* W *y se denota por* $M_f(B_V, B_W)$.

Si $f : V \to V$ es un endomorfismo se denota por $M_f(B_V)$ a la matriz $M_f(B_V, B_V)$.

Ejemplo 2.2.4. *Sea* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *la aplicación lineal que verifica*

$$f(1,1,1) = (2,2), f(0,1,1) = (1,1), f(0,0,3) = (0,3).$$

Se obtiene a continucación la expresión matricial de f *en las bases canónicas* B_3 *de* $\mathbb{R}^3$ *y* B_2 *de* $\mathbb{R}^2$. *Para ello se calculan las imágenes de los vectores de la base* B_3.

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= f(1,1,1) - f(0,1,1) = (2,2) - (1,1) = (1,1), \\ f(0,1,0) &= f(0,1,1) - \frac{1}{3}f(0,0,3) = (1,1) - (0,1) = (1,0), \\ f(0,0,1) &= \frac{1}{3}f(0,0,3) = (0,1). \end{aligned}$$

Las columnas de $M_f(B_3, B_2)$ *son las coordenadas en la base* B_2 *de dichas imágenes. Por tanto, la expresión matricial es*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Así $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3)$ *para todo* $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

2.3 Núcleo e imagen

Proposición 2.3.1. *Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal. Se tiene que:*

1. *El conjunto imagen* $\mathrm{Im}(f) = \{f(v) \mid v \in V\}$ *es un subespacio vectorial de* W*, que se llama* **imagen** *de la aplicación lineal* f.

2. *Si* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *es un sistema generador de* V *entonces* $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ *es un sistema generador de* $\mathrm{Im}(f)$. *Se llama* **rango** *de* f *a la dimensión de* $\mathrm{Im}(f)$

$$\mathrm{rango}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

3. *Se define el* **núcleo** *de la aplicación lineal* f *como el conjunto de vectores de* V *cuya imagen mediante* f *es* 0_W,

$$\mathrm{Ker}(f) = \{v \in V | f(v) = 0_W\}.$$

Se tiene que $\mathrm{Ker}(f)$ *es un subespacio vectorial de* V *y que* $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(0_W)$.

Proposición 2.3.2. *Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal. Si V es un espacio vectorial finitamente generado, se verifica que:*

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim V.$$

Proposición 2.3.3. *Es condición necesaria y suficiente para que una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ sea inyectiva que*

$$\mathrm{Ker}(f) = \{0_V\}.$$

Proposición 2.3.4. *Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal.*

1. *Si V es finitamente generado, entonces f es inyectiva si y sólo si* $\dim V = \dim(f(V))$.

2. *Sea* $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *una base de* V*, entonces* f *es inyectiva si y sólo si* $f(B) = \{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ *es una base de* $\mathrm{Im}(f)$ *si y sólo si* $f(B)$ *es linealmente independiente.*

Definición 2.3.5. *Se llama* **isomorfismo** *a una aplicación* $f : V \longrightarrow W$ *que es lineal y biyectiva. En dicho caso, los espacios vectoriales* V *y* W *se dicen* **isomorfos**.

Proposición 2.3.6.

1. *Una aplicación lineal* $f : V \longrightarrow W$ *es biyectiva si y sólo si*

$$\mathrm{Im}(f) = W \text{ y } \mathrm{Ker}(f) = \{0_V\}.$$

2. *Un endomorfismo* $f : V \longrightarrow V$ *es biyectivo si y sólo si* f *es inyectiva o sobreyectiva.*

Ejemplo 2.3.7. *Sea* $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *la aplicación lineal definida por* $h(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 2x_2 - 3x_3, 3x_1 + x_2 - 2x_3)$*. Se obtienen a continuación las ecuaciones cartesianas de* $\mathrm{Ker}(h)$ *y una base de* $\mathrm{Im}(h)$ *en las bases canónicas* B_3 *de* $\mathbb{R}^3$ *y* B_2 *de* $\mathbb{R}^2$.

La matriz asociada a h *es*

$$M_h(B_3, B_2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Un vector (x_1, x_2, x_3) *de* $\mathbb{R}^3$ *pertenece a* $\mathrm{Ker}(h)$ *si verifica*

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ó equivalentemente

$$\textit{Ecuaciones cartesianas de } \mathrm{Ker}(h) \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \end{array} \right.$$

Se tiene que $\text{Im}(h) = \langle h(1,0,0), h(0,1,0), h(0,0,1)\rangle = \langle(2,3),(2,1),(-3,-2)\rangle = \langle(2,3),(2,1)\rangle$. *Por tanto* $\{(2,3),(2,1)\}$ *es una base de* $\text{Im}(h)$.

Teorema 2.3.8. *Supongamos que* $\dim V = n$*, entonces* V *es isomorfo a* K^n.

Ejemplo 2.3.9. *Sea* V *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$ *con* $\dim V = 3$. *Sea* $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ *una base de* V *y sea* $B_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ *la base canónica de* $\mathbb{R}^3$. *La aplicación lineal* $f : V \to \mathbb{R}^3$ *que queda determinada por* $f(u_1) = e_1$, $f(u_2) = e_2$ *y* $f(u_3) = e_3$ *es un isomorfismo. Por lo tanto* V *y* $\mathbb{R}^3$ *son isomorfos.*

2.4 Operaciones con aplicaciones lineales

Sean B_V y B_W bases de V y W respectivamente. Dadas dos aplicaciones lineales $f : V \to W$, $g : V \to W$ y un escalar $\lambda \in K$, definimos las aplicaciones lineales:

1. **Suma** $f + g : V \to W$ dada por $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$ para todo $v \in V$.

2. **Producto por un escalar** $\lambda f : V \to W$ dada por $(\lambda f)(v) = \lambda f(v)$ para todo $v \in V$.

Se verifica que

$$M_{f+g}(B_V, B_W) = M_f(B_V, B_W) + M_g(B_V, B_W),$$
$$M_{\lambda f}(B_V, B_W) = \lambda M_f(B_V, B_W).$$

Sea U un espacio vectorial sobre el cuerpo K y B_U una base de U. Dadas dos aplicaciones lineales $f : V \to W$ y $g : W \to U$ entonces la **composición** $g \circ f : V \to U$ es una aplicación lineal con matriz asociada

$$M_{g\circ f}(B_V, B_U) = M_g(B_W, B_U) M_f(B_V, B_W).$$

Si V es finitamente generado, una aplicación lineal $f : V \to W$ es un isomorfismo si y sólo si

$$\dim V = \dim(\text{Im}(f)) = \dim W.$$

Por tanto, si $\dim V = n$ la matriz $M_f(B_V, B_W)$ es cuadrada de tamaño $n \times n$ y

$$\text{rango}(M_f(B_V, B_W)) = \text{rango}(\text{Im}(f)) = \dim(\text{Im}(f)) = n,$$

entonces $M_f(B_V, B_W)$ tiene determinante distinto de cero y por tanto es una matriz invertible.

La aplicación **inversa** $f^{-1} : W \longrightarrow V$ es también un isomorfismo cuya matriz asociada es

$$M_{f^{-1}}(B_W, B_V) = (M_f(B_V, B_W))^{-1}.$$

Ejemplo 2.4.1. *Se consideran las aplicaciones lineales* $f, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f(x, y, z) = (4x - y, z + x, x), \qquad g(x, y, z) = (y, 2z + 3x, z).$$

Se obtienen a continuación las matrices asociadas a $f - 2g$, $f \circ g$, $g \circ f$ *respecto de la base canónica* B *de* $\mathbb{R}^3$.

$$M_f(B) = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ M_g(B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_{f-2g}(B) = M_f(B) - 2M_g(B) = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -5 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$M_{f\circ g}(B) = M_f(B)M_g(B) = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_{g\circ f}(B) = M_g(B)M_f(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 14 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lo que demuestra que la composición de aplicaciones lineales en general no es conmutativa.

Además f y g son aplicaciones lineales invertibles ya que $\det(M_f(B)) \neq 0$ *y* $\det(M_g(B)) \neq 0$. *Las aplicaciones lineales inversas* $f^{-1}, g^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *tienen matrices asociadas*

$$M_{f^{-1}}(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_{g^{-1}}(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.5 Matriz de cambio de coordenadas

Supongamos que $\dim V = n$. Sean $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$ bases de V. Dado un vector $v \in V$, llamamos $(x_1, \ldots, x_n)_B$ a sus coordenadas en la base B y $(x'_1, \ldots, x'_n)_{B'}$ a sus coordenadas en la base B'.

Supongamos que las coordenadas de los vectores de la base B' en la base B son conocidas, es decir

$$\begin{aligned} v'_1 &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{n1}v_n, \\ v'_2 &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{n2}v_n, \\ &\vdots \\ v'_1 &= a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \cdots + a_{nn}v_n. \end{aligned}$$

Entonces, se verifica que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

La matriz (a_{ij}) es la **matriz de cambio de coordenadas** de B' a B: la matriz que por columnas tiene las coordenas de los vectores de la base B' en la base B. Se denota por $M(B', B)$.

La matriz de cambio de coordenadas de B a B' denotada por $M(B, B')$ verifica

$$M(B, B') = M(B', B)^{-1}$$

y así

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Observación 2.5.1. *La matriz $M(B', B)$ es la matriz asociada a un isomorfismo de K^n en K^n.*

Ejemplo 2.5.2. *Sea B la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y consideremos también la base $B' = \{(1,3,0),(1,0,2),(0,4,-2)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Entonces, la matriz de cambio de coordenadas de B' a B es*

$$M(B', B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Sea v un vector de coordenadas $(1,1,2)_{B'}$, sus coordenadas en la base B son $(2,11,-2)_B$ y se obtienen como sigue:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2.6 Matrices equivalentes y semejantes

Se supone que $\dim V = n$ y $\dim W = m$.

Proposición 2.6.1. *Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal. Dadas dos bases B_V y B'_V de V, y dos bases B_W y B'_W de W. Se tiene que*

$$M_f(B'_V, B'_W) = M(B_W, B'_W)M_f(B_V, B_W)M(B'_V, B_V).$$

Definición 2.6.2. *Dos matrices $A, A' \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ son* **equivalentes** *si existen matrices invertibles $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ y $Q \in \mathcal{M}_{m\times m}(K)$ tales que*

$$A' = Q^{-1}AP.$$

Equivalentemente, A y A' son matrices asociadas a la misma aplicación lineal $f : K^n \to K^m$ en bases distintas.

Ejemplo 2.6.3. *Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal con matriz asociada en las bases canónicas B_3 de $\mathbb{R}^3$ y B_2 de $\mathbb{R}^2$*

$$M_f(B_3, B_2) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Se consideran las bases $B'_3 = \{(1,3,0), (1,0,2), (0,4,-2)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $B'_2 = \{(2,1), (4,3)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Se calcula a continuación $M_f(B'_3, B'_2)$.

Para ello se utiliza la proposición 2.6.1. Tenemos que

$$M_f(B'_3, B'_2) = M(B_2, B'_2)M_f(B_3, B_2)M(B'_3, B_3),$$

esto es

$$M_f(B'_3, B'_2) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -35/2 & -39/2 & -6 \\ 19/2 & 19/2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Proposición 2.6.4. *Sea $f : V \to V$ un endomorfismo. Dadas dos bases B_V y B'_V de V. Se tiene que*

$$M_f(B'_V) = M(B_V, B'_V)M_f(B_V)M(B'_V, B_V).$$

Definición 2.6.5. *Dos matrices $A, A' \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ son* **semejantes** *si existe una matriz invertible $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ tal que*

$$A' = P^{-1}AP.$$

Equivalentemente, A y A' son matrices asociadas al mismo endomorfismo $f : K^n \to K^n$ en bases distintas.

Ejemplo 2.6.6. *Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo con matriz asociada en la base canónica B de $\mathbb{R}^3$*

$$M_f(B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se considera la base $B' = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Se calcula a continuación $M_f(B')$.

Para ello se utiliza la proposición 2.6.4. Se tiene que

$$M_f(B') = M(B', B)^{-1}M_f(B)M(B', B),$$

esto es

$$M_f(B') = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & 2 & 3/2 \\ -1/2 & 0 & 5/2 \end{pmatrix}.$$

2.7 Interpretación vectorial de un sistema de ecuaciones lineales

Dado un sistema de ecuaciones lineales en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

donde $m \geq 1$, $a_{ij}, b_i \in K$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ cuya expresión matricial es $AX = b$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

con $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ y $b \in \mathcal{M}_{m\times 1}(K)$, una solución $(s_1, \ldots, s_n)$ del sistema verifica

$$s_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + s_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Es decir $(s_1, \ldots, s_n)$ es combinación lineal de los vectores columna de la matriz de coeficientes.

Sea $f : K^n \to K^m$ la aplicación lineal con matriz asociada A en las bases canónicas de K^n y K^m. Se tiene que:

1. $(b_1, \ldots, b_m) \in \text{Im}(f) \Leftrightarrow AX = b$ tiene solución.

2. Sea $S = (s_1, \ldots, s_n) \in K^n$ una solución particular de $AX = b$. El conjunto de soluciones de $AX = b$ es igual al conjunto de vectores originales de $(b_1, \ldots, b_m)$

$$f^{-1}(b_1, \ldots, b_m) = S + \operatorname{Ker}(f)$$

siendo $\operatorname{Ker}(f)$ el conjunto de soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$.

Ejemplo 2.7.1. *Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal cuya matriz asociada en las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^2$ es*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Los vectores originales de $v = (1, -1) \in \mathbb{R}^2$ son los vectores del conjunto $f^{-1}(v)$, es decir, las soluciones de

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

esto es

$$(0, -1/3, -1, 0) + \langle (3, 5, 6, 0), (0, 5, 6, 3) \rangle$$

siendo $(0, -1/3, -1, 0)$ un vector de $f^{-1}(v)$ y $\operatorname{Ker}(f) = \langle (3, 5, 6, 0), (0, 5, 6, 3) \rangle$.

3

Diagonalización

3.1 Motivación

La matriz cuadrada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

es semejante a la matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ya que

$$D = P^{-1}AP \text{ siendo } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K. Si $f : V \to V$ es un endomorfismo cuya matriz asociada D en cierta base de V es diagonal, muchos problemas relacionados con f se simplifican notablemente. Algunos ejemplos son: clasificar f; obtener sus subespacios invariantes; calcular f^n, $n \in \mathbb{N}$. Dada una matriz cuadrada

A (que es la matriz asociada a un endomorfismo) en este capítulo se estudia cómo obtener una matriz semejante D que sea diagonal.

3.2 Valores y vectores propios de un endomorfismo

Sea V un espacio vectorial no nulo sobre el cuerpo K y $f : V \to V$ un endomorfismo.

Definición 3.2.1. *Se dice que un escalar $\lambda \in K$ es un* **valor propio** *(autovalor) de f si existe un vector $v \in V$ no nulo tal que*

$$f(v) = \lambda v.$$

Definición 3.2.2. *Si λ es un valor propio de f, un vector $v \in V$ que verifica $f(v) = \lambda v$ se llama* **vector propio** *(autovector) de f asociado a λ.*

Ejemplo 3.2.3. *Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo definido por*

$$f(x, y, z) = (x + 3y + 3z, -3x - 5y - 3z, 3x + 3y + z).$$

Entonces, $\lambda = -2$ es valor propio de f ya que existe un vector no nulo $v = (-1, 1, 0)$ tal que $f(v) = -2v$. Por tanto v es un vector propio de f asociado a $\lambda = -2$.

Proposición 3.2.4. *El conjunto de todos los vectores propios de f asociados a un mismo valor propio λ de f*

$$V_\lambda = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$$

es un subespacio vectorial de V que recibe el nombre de **subespacio propio** *de f asociado a λ.*

Sea $id : V \to V$ la aplicación identidad en V.

Observaciones 3.2.5. *1.* $V_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda id)$.

2. $\lambda \in K$ *es valor propio de* $f \Leftrightarrow$ *el endomorfismo* $f - \lambda id$ *no es inyectivo.*

3. *En particular,* $\lambda = 0$ *es valor propio de* $f \Leftrightarrow f$ *no es inyectiva* $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = V_0 \neq \{0_V\}$.

4. *Existen endomorfismos que no tienen valores propios y por tanto tampoco tienen vectores propios (véase el ejemplo 3.2.6).*

Ejemplo 3.2.6. *Veamos que el endomorfismo* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definido por* $f(x,y) = (-y,x)$ *no tiene valores propios reales. Si* $\lambda \in \mathbb{R}$ *fuese un valor propio tendríamos* $f(x,y) = \lambda(x,y) = (-y,x)$ *para algún* $(x,y) \neq (0,0)$, *y así* $\lambda x = -y$, $\lambda y = x$ *de donde* $(\lambda^2 + 1)y = 0$, *lo que sólo es posible si* $\lambda^2 = -1$, *por lo tanto* λ *no es valor propio.*

Proposición 3.2.7. *Sean* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ *valores propios distintos del endomorfismo* f.

1. *Sea* v_i *es un vector propio no nulo de* f *asociado a* λ_i, $i = 1, \ldots, p$ *entonces* $\{v_1, \ldots, v_p\}$ *es linealmente independiente.*

2. $V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_p}$ *es suma directa.*

Observación 3.2.8. *Si* $\mathrm{dim}V = n$ *el endomorfismo* f *no puede tener más de* n *valores propios distintos ya que en caso contrario tendría más de* n *vectores propios linealmente independientes.*

3.3 Valores y vectores propios de una matriz cuadrada

Sea A una matriz cuadrada $n \times n$ cuyos elementos pertenecen a K, es decir $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$.

Definición 3.3.1. *Se dice que un escalar* $\lambda \in K$ *es un* **valor propio** *(autovalor) de* A *si existe un vector columna* $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(K)$ *no nulo tal que*

$$AX = \lambda X.$$

Definición 3.3.2. *Si* λ *es un valor propio de* A*, un vector columna* $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(K)$ *que verifica* $AX = \lambda X$ *se llama* **vector propio** *(autovector) de* A *asociado a* λ.

Sea I_n la matriz identidad de tamaño $n \times n$.

Observaciones 3.3.3. *Supongamos que* $\dim V = n$ *y sea* B *una base de* V. *Sea* $f : V \longrightarrow V$ *el endomorfismo cuya matriz asociada en la base* B *es* A. *Se tiene que:*

1. λ *es un valor propio de* $f \Leftrightarrow \lambda$ *es un valor propio de* $A \Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$.
2. *Sea* $v \in V$ *con vector columna de coordenadas* X *en la base* B*, es decir* $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(K)$. *Entonces,* v *es vector propio de* $f \Leftrightarrow X$ *es vector propio de* $A \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)X = 0$.
3. $\dim V_\lambda = n - \text{rango}(A - \lambda I_n)$.

Ejemplo 3.3.4. *Sea* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *el endomorfismo definido por*

$$f(x, y, z) = (3x, x + 2y, 4x + 2z).$$

Sea B *la base canónica de* $\mathbb{R}^3$. *La matriz asociada a* f *en la base* B *es*

$$A = M_f(B) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como $\text{rango}(A - 3I_3) = 2$ *el sistema* $(A - 3I_3)X = 0$*, es decir*

$$\begin{pmatrix} 3-3 & 0 & 0 \\ 1 & 2-3 & 0 \\ 4 & 0 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tiene solución no nula. Por tanto, $\lambda = 3$ *es valor propio de* f *y* A*. El subespacio propio de* V_3 *tiene* $\dim V_3 = 1$ *y ecuaciones cartesianas*

$$\textit{Ecuaciones cartesianas de } V_3 \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 4x_1 - x_3 = 0 \end{cases}.$$

Así $V_3 = \{(a, a, 4a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Por otra parte, $\text{rango}(A - 2I_3) = 1$*, es decir* $\lambda = 2$ *es un valor propio de* f *y* A*,* $\dim V_2 = 2$*. Resolviendo* $(A - 2I_3)X = 0$*, es decir*

$$\begin{pmatrix} 3-2 & 0 & 0 \\ 1 & 2-2 & 0 \\ 4 & 0 & 2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se tiene que $V_2 = \{(0, a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ *y que la ecuación cartesiana de* V_2 *es* $x_1 = 0$.

3.4 Polinomio característico

Definición 3.4.1. *Sea* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$*. El* **polinomio característico** *de* A *es* $\det(A - \lambda I_n)$ *y su* **ecuación característica** *es*

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Proposición 3.4.2. *Sean* A *y* A' *matrices en* $\mathcal{M}_{n\times n}(K)$*. Si* A *y* A' *son semejantes entonces tienen el mismo polinomio característico.*

Sea V un espacio vectorial no nulo sobre el cuerpo K y $f : V \to V$ un endomorfismo.

Observaciones 3.4.3. 1. *De la proposición 3.4.2 se tiene que todas las matrices asocidas a* f *en las distintas bases de* V *tienen el mismo polinomio característico.*

2. El recíproco de la proposición 3.4.2 no es cierto. Véase el ejemplo 3.4.5,(2).

Definición 3.4.4. *Se llama polinomio característico de f al polinomio característico de cualquiera de sus matrices asociadas. Análogamente sucede con la ecuación característica.*

Ejemplos 3.4.5. *1. Calculemos el polinomio característico del endomorfismo f de $\mathbb{R}^5$ definido por*

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-x_2, x_1 + x_3, 2x_3 - x_4, 2x_4 + 6x_5, 3x_5).$$

Sea B la base canónica de $\mathbb{R}^5$ y $A = M_f(B)$, entonces

$$\det(A - \lambda I_5) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$=(3-\lambda)(2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 0-\lambda & -1 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)^2(\lambda^2+1).$$

2. Las siguientes matrices tienen el mismo polinomio característico $(2-\lambda)^4$ pero no son semejantes:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.5 Multiplicidad de un valor propio

Sea V un espacio vectorial no nulo sobre el cuerpo K y $f : V \to V$ un endomorfismo. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$.

Definición 3.5.1. *Sea λ un valor propio de f (o A). Se llama* **multiplicidad** *de λ a su multiplicidad como raiz de la ecuación característica de f (o A).*

Teorema 3.5.2. *Sea λ un valor propio de f (o A) con multiplicidad m. Entonces*

$$1 \leq \dim V_\lambda \leq m.$$

Observaciones 3.5.3. *1. Sea λ un valor propio de f (o A) con multiplicidad m. Si $m = 1$ entonces $\dim V_\lambda = 1$*

2. Si $A, A' \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ son matrices semejantes entonces tienen los mismos valores propios, con las mismas multiplicidades y las mismas dimensiones de sus subespacios propios.

Proposición 3.5.4. *Supongamos que $\dim V = n$. Sean $\lambda_1, \ldots \lambda_p$ los valores propios distintos de f (o A), $m_1, \ldots, m_p$ sus multiplicidades y $d_1, \ldots, d_p$ las dimensiones de los subespacios propios correspondientes. Entonces el número máximo de vectores propios linealmente independientes de f (o A) es $d_1 + \cdots + d_p$. Además,*

$$p \leq d_1 + \cdots + d_p \leq m_1 + \cdots + m_p \leq n.$$

Observaciones 3.5.5. *Con la notación de la proposición 3.5.4.*

1. *Si $K = \mathbb{C}$ entonces $m_1 + \cdots + m_p = n$. Todas las raices del polinomio característico pertenecen a K.*

2. *Si $K = \mathbb{R}$, el polinomio característico puede que no tenga todas sus raices reales en cuyo caso $m_1 + \cdots + m_p < n$. Aun más, podría carecer de raices reales y en dicho caso no tendría valores propios.*

Ejemplo 3.5.6. *Obtenemos a continuación los valores propios de la matriz A junto con sus multiplicidades y las dimensiones de los subespacios propios,*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & 10 \\ -1 & -1 & -6 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es $\det(A - \lambda I_3) = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 = (\lambda + 2)(\lambda + 1)^2$. *Por tanto tenemos valores propios* $\lambda_1 = -2$ *con multiplicidad* $m_1 = 1$ *y* $\lambda_2 = -1$ *con multiplicidad* $m_2 = 2$. *Las dimensiones son*

$$d_1 = \dim V_{\lambda_1} = 3 - \text{rango}(A - \lambda_1 I_3) = 1,$$

$$d_2 = \dim V_{\lambda_2} = 3 - \text{rango}(A - \lambda_2 I_3) = 2.$$

3.6 Diagonalización de endomorfismos y matrices cuadradas

Sea V un espacio vectorial no nulo sobre el cuerpo K y $f : V \to V$ un endomorfismo. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$.

Definición 3.6.1. *Se dice que f es* **diagonalizable** *si existe una base B' de V en la que la matriz asociada a f, $M_f(B')$ es diagonal. Así,* **diagonalizar** *f significa hallar la base B'.*

Definición 3.6.2. *Se dice que A es* **diagonalizable** *si existe una matriz diagonal D semejante a A. Esto es, si existe D y una matriz invertible $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ tal que $D = P^{-1}AP$. Así,* **diagonalizar** *A significa hallar D y P.*

Observaciones 3.6.3. *1. Supongamos que A es la matriz asociada a f en cierta base B. Entonces:*

$$f \text{ es diagonalizable} \Leftrightarrow A \text{ es diagonalizable.}$$

2. *Si* $D = P^{-1}AP$ *es la diagonalización de* A *entonces*

   (a) $D = M_f(B')$ *es la matriz asociada a* f *en cierta base* B' *de* V *formada por vectores propios.*

   (b) $P = M(B', B)$ *es la matriz de cambio de coordenadas de* B' *a* B.

Proposición 3.6.4. *Un endomorfismo* f *es diagonalizable si y sólo si existe una base de* V *formada por vectores propios de* f

Teorema 3.6.5. *Supongamos que* $\dim V = n$. *Sean* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ *los valores propios distintos de* f *(o* A*),* $m_1, \ldots, m_p$ *sus multiplicidades y* $d_1, \ldots, d_p$ *las dimensiones de los subespacios propios correspondientes. Las condiciones necesarias y suficientes para que exista una base de* V *formada por vectores propios son:*

1. *El polinomio característico de* f *tiene todas sus raices* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ *en* K, *es decir*

$$m_1 + \ldots + m_p = n.$$

2. *La multiplicidad de cada valor propio es igual a la dimensión de su subespacio propio, esto es*

$$m_i = d_i, \quad i = 1, \ldots, p.$$

Corolario 3.6.6. *Supongamos que* f *es diagonalizable. Sean* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ *los valores propios de* f *con multiplicidades* $m_1, \ldots, m_p$ *respectivamente. Sea* B_i *una base del subespacio propio* V_{λ_i} *que tiene* $m_i = d_i$ *elementos,* $i = 1, \ldots, p$. *Entonces:*

1. $B' = B_1 \cup \cdots \cup B_p$ *es una base de* V *formada por vectores propios de* f.

2. *La matriz asociada a* f *en la base* B' *es diagonal y su diagonal principal es*

$$\lambda_1, \overset{m_1}{\ldots}, \lambda_1, \lambda_2, \overset{m_2}{\ldots}, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, \overset{m_p}{\ldots}, \lambda_p$$

Ejemplo 3.6.7. *1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo definido por*

$$f(x,y,z) = (x + 2y + 10z, 2x + y + 10z, -x - y - 6z)$$

cuya matriz asociada en la base canónica B de $\mathbb{R}^3$ es la matriz A del ejemplo 3.5.6 cuyos valores propios son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -1$. Una base de V_{λ_1} es $B_{\lambda_1} = \{(-2,-2,1)\}$ y de V_{λ_2} es $B_{\lambda_2} = \{(-5,0,1),(-1,1,0)\}$. Por tanto una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de f es

$$B' = B_{\lambda_1} \cup B_{\lambda_2} = \{(-2,-2,1),(-5,0,1),(-1,1,0)\}.$$

Además,

$$D = P^{-1}AP = M_f(B') = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

siendo

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. El endomorfismo f del ejemplo 3.4.5,(1) no es diagonalizable ya que su polinomio característico tiene raices que no son reales.

4

Ejercicios Resueltos

1. Sea $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por

$$h(a, b, c) = (a + b - c, 3a + 2b - 2c, 8a - b).$$

Hallar la matriz asociada a h en la base de $\mathbb{R}^3$, $B = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$.

Solución

Calculamos la imagen de los vectores de la base B,

$$\begin{aligned} h(1,1,1) &= (1,3,7), \\ h(0,1,1) &= (0,0,-1), \\ h(0,0,1) &= (-1,-2,-1). \end{aligned}$$

Obtenemos las coordenadas de dichas imágenes en la base B,

$$(1, 3, 7) = \alpha_1(1, 1, 1) + \alpha_2(0, 1, 1) + \alpha_3(0, 0, 1)$$

de donde

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 7. \end{cases}$$

Así las coordenadas de $h(1,1,1)$ en la base B son $(1,2,4)_B$. Análogamente obtenemos que las coordenadas de $h(0,1,1)$ en la base B son $(0,0,-1)_B$ y las coordenadas de $h(0,0,1)$ en la base B son $(0,1,-1)_B$. Por tanto

$$M_h(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Dadas las bases de $\mathbb{R}^3$

$$B_1 = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0)\},\ B_2 = \{(1,2,1),(1,1,1),(0,0,1)\}.$$

Se pide:

i) Hallar la matriz de cambio de coordenadas de B_1 a B_2.

ii) Hallar la matriz de cambio de coordenadas de B_2 a B_1.

Solución

Para obtener la matriz de cambio de coordenadas de B_1 a B_2 calculamos las coordenadas de los vectores de la base B_1 en la base B_2. Las coordenadas de $(1,1,1)$ son $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ que verifican

$$(1,0,1) = \alpha_1(1,2,1) + \alpha_2(1,1,1) + \alpha_3(0,0,1)\}.$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \end{cases}$$

se obtiene: $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = (-1,2,0)_{B_2}$.

Resolviendo

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \end{cases}$$

obtenemos las coordenadas $(1,-1,1)_{B_2}$ de $(0,1,1)$.

Resolviendo

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

obtenemos las coordenadas $(0,1,-1)_{B_2}$ de $(0,1,1)$.

La matriz de cambio de coordenadas de B_1 a B_2 es

$$M(B_1,B_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matriz de cambio de coordenadas de B_2 a B_1 es

$$M(B_2,B_1) = M(B_1,B_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

3. Sea $h : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ definida por

$$h\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & d & b+c \\ 2c & a+c & b+d \end{pmatrix}.$$

Hallar la matriz asociada a h es las siguientes bases de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$:

$$B'_{\mathcal{M}_{2\times 2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B'_{\mathcal{M}_{2\times 3}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Solución

La matriz asociada a h en las bases canónicas $B_{\mathcal{M}_{2\times 2}}$ de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $B_{\mathcal{M}_{2\times 3}}$ de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ es

$$M_f(B_{\mathcal{M}_{2\times 2}}, B_{\mathcal{M}_{2\times 3}}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Utilizando la relación de equivalencia

$$M_f(B'_{\mathcal{M}_{2\times 2}}, B'_{\mathcal{M}_{2\times 3}}) = M(B'_{\mathcal{M}_{2\times 2}}, B_{\mathcal{M}_{2\times 2}})^{-1} M_f(B_{\mathcal{M}_{2\times 2}}, B_{\mathcal{M}_{2\times 3}}) M(B'_{\mathcal{M}_{2\times 3}}, B_{\mathcal{M}_{2\times 3}})$$

siendo

$$M(B'_{\mathcal{M}_{2\times 2}}, B_{\mathcal{M}_{2\times 2}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$M(B'_{\mathcal{M}_{2\times 3}}, B_{\mathcal{M}_{2\times 3}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

se tiene que

$$M_f(B'_{\mathcal{M}_{2\times 2}}, B'_{\mathcal{M}_{2\times 3}}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Dado $m \in \mathbb{R}$, sea $h_m : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo cuya expresión matricial en la base canónica B de $\mathbb{R}^3$ es

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 2m & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcular los valores de m para los cuales h_m es automorfismo (endomorfismo biyectivo).

(b) Para aquellos valores de m para los cuales h_m no sea automorfismo determinar las ecuaciones paramétricas de $\mathrm{Ker}(h_m)$ y la dimensión de $\mathrm{Im}(h_m)$.

Solución

(a) La proposición 2.3.6,(2) nos permite afirmar que h_m es biyectiva si y sólo si h_m es sobreyectiva si y sólo si

$$\dim(\mathrm{Im}(h_m)) = \dim\mathbb{R}^3 = \mathrm{rango}(M_{h_m}(B)).$$

Para que $\mathrm{rango}(M_{h_m}(B)) = 3$ el determinante de $M_{h_m}(B)$ tiene que ser no nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 2m & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2m \end{vmatrix} = 7m - 3 - 4m^3 = -(m-1)(2m+3)(2m-1).$$

Por tanto h_m es automorfismo para m distinto de 1, $-3/2$ y $1/2$.

(b) Sea $m = 1$, para obtener las ecuaciones paramétricas del núcleo resolvemos la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ecuaciones paramétricas de $\text{Ker}(h_1) : (x_1, x_2, x_3) = (-a, a, 0)$.

Por tanto $\dim(\text{Ker}(h_1)) = 1$ y

$$\dim(\text{Im}(h_1)) = \dim\mathbb{R}^3 - \dim(\text{Ker}(h_1)) = 3 - 1 = 2.$$

Sea $m = -3/2$, para obtener las ecuaciones paramétricas del núcleo resolvemos la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ecuaciones paramétricas de $\text{Ker}(h_{-3/2}) : (x_1, x_2, x_3) = (a, 8a/7, 5a/7)$.

Por tanto $\dim(\text{Ker}(h_{-3/2})) = 1$ y

$$\dim(\text{Im}(h_{-3/2})) = \dim\mathbb{R}^3 - \dim(\text{Ker}(h_{-3/2})) = 3 - 1 = 2.$$

Sea $m = 1/2$, para obtener las ecuaciones paramétricas del núcleo resolvemos la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ecuaciones paramétricas de $\text{Ker}(h_{1/2}) : (x_1, x_2, x_3) = (-a, 0, a)$.

Así $\dim(\mathrm{Ker}(h_{1/2})) = 1$ y

$$\dim(\mathrm{Im}(h_{1/2})) = \dim\mathbb{R}^3 - \dim(\mathrm{Ker}(h_{1/2})) = 3 - 1 = 2.$$

5. Calcular los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que el vector $w = (1, a, -a, 0)$ pertenezca a la imagen de la aplicación lineal $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ que tiene por matriz asociada respecto a las bases canónicas

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para los valores de a obtenidos, calcular el conjunto de los vectores originales de w.

Solución

El rango de A es tres y por tanto los vectores columna de A son una base de $\mathrm{Im}(h)$. Para que w pertenezca a $\mathrm{Im}(h)$ el sistema con expresión matricial

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$$

debe ser compatible. Para ello el rango de la matriz ampliada ha de ser 3, es decir

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & a \\ -1 & 1 & 0 & -a \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -12a + 2 = 0.$$

Podemos concluir que si $a = 1/6$ entonces $w \in \text{Im}(h)$. El conjunto de vectores originales de w es el conjunto de soluciones de la ecuación matricial anterior y es igual a

$$h^{-1}(w) = \{(\frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{6})\}.$$

6. Probar que $\lambda \in K$ es valor propio de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ si y sólo si $\lambda - m \in K$ es valor propio de $A - mI_n$.

Solución

$\lambda \in K$ es valor propio de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K) \Leftrightarrow$ existe un vector columna $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(K)$ no nulo tal que $AX = \lambda X \Leftrightarrow$ existe un vector columna $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(K)$ no nulo tal que $(A - mI_n)X = AX - mX = \lambda X - mX = (\lambda - m)X$ $\Leftrightarrow \lambda - m \in K$ es valor propio de $A - mI_n$.

7. Probar que si $\lambda \in K$ es valor propio de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$, entonces λ^m es valor propio de A^m.

Solución

$\lambda \in K$ es valor propio de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K) \Leftrightarrow$ existe un vector columna $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(K)$ no nulo tal que $AX = \lambda X \Rightarrow$ existe un vector columna $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(K)$ no nulo tal que

$$A^m X = A^{m-1}AX = A^{m-1}\lambda X = \lambda A^{m-2}AX = \lambda^2 A^{m-3}AX = \cdots =$$
$$= \lambda^{m-1}AX = \lambda^m X$$

$\Rightarrow \lambda^m$ es valor propio de A^m.

8. Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo K y $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Sean λ_1 y λ_2 valores propios de f distintos. Probar que $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{0_V\}$.

Solución

Sea $v \in V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2}$. Entonces $f(v) = \lambda_1 v = \lambda_2 v$ y por tanto $(\lambda_1 - \lambda_2)v = 0_V$. Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ se tiene que $v = 0_V$.

9. Sea $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ un endomorfismo definido por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + ax_2, ax_2, ax_3 + x_4, -x_3 - ax_4), \ a \in \mathbb{R}.$$

¿Es f diagonalizable para algún valor de a?

Solución

La matriz asociada a f en la base canónica de $\mathbb{R}^4$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -a \end{pmatrix},$$

y su polinomio característico es

$$\det(A - \lambda I_4) = (\lambda - 1)(\lambda - a)(\lambda^2 - a^2 + 1).$$

Los valores propios de f son 1,a,$\sqrt{a^2-1}$ y $-\sqrt{a^2-1}$. Para que todos los valores propios de f sean reales es necesario que $a^2 - 1 \geq 0$, es decir $\mid a \mid \geq 1$.

Se estudia a continuación para qué valores de a las multiplicidades de los valores propios y las dimensiones de sus respectivos subespacios propios coinciden. Si $\mid a \mid \geq 1$ y $a \notin \{\pm 1, \pm\sqrt{2}\}$ tenemos cuatro valores propios distintos y por tanto f es diagonalizable. Veamos qué sucede cuando $a \in \{\pm 1, \pm\sqrt{2}\}$.

Si $a = 1$, los valores propios son $\lambda_1 = 0$ con multiplicidad $m_1 = 2$ y $\lambda_2 = 1$ con multiplicidad $m_2 = 2$. Además,

$$d_1 = \dim V_{\lambda_1} = 4 - \text{rango}(A - \lambda_1 I_4) = 4 - 3 = 1$$

siendo

$$A - \lambda_1 I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto $d_1 \neq m_1$ y f no es diagonalizable para $a = 1$. Análogamente se demuestra que f no es diagonalizable para $a = -1$ ya que tiene valores propios $\lambda_1 = 0$ con multiplicidad $m_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ con multiplicidad $m_2 = 1$ y $\lambda_3 = -1$ con multiplicidad $m_3 = 1$, pero $d_1 = 1 \neq m_1$.

Si $a = \sqrt{2}$, los valores propios son $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad $m_1 = 2$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$ con multiplicidad $m_2 = 1$ y $\lambda_3 = -1$ con multiplicidad $m_3 = 1$. Además,

$$d_1 = \dim V_{\lambda_1} = 4 - \text{rango}(A - \lambda_1 I_4) = 4 - 2 = 2$$

siendo

$$A - \lambda_1 I_4 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}-1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -\sqrt{2}-1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto $d_1 = m_1 = 2$, $d_2 = m_2 = 1$ y $d_3 = m_3 = 1$. En efecto, f es diagonalizable para $a = \sqrt{2}$. Análogamente se demuestra que f es diagonalizable para $a = -\sqrt{2}$.

Podemos concluir que f es diagonalizable cuando a verifica $| a | > 1$.

10. Sea $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo tal que

$$\text{Ker}(h) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$$

y $h(1, 1, 1) = (0, 3, 1)$. Hallar los valores propios de h. ¿Es h un endomorfismo diagonalizable? En caso afirmativo, hallar una base de cada subespacio propio.

Solución

Una base de $\mathrm{Ker}(h)$ es $\{(1,1,0),(-1,0,1)\}$ y como

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

tenemos la base $B' = \{(1,1,0),(-1,0,1),(1,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Las coordenadas de $h(1,1,1)$ en la base B' son $(5,3,-2)_{B'}$ y así

$$M_h(B') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de h son $\lambda_1 = 0$ con multiplicidad $m_1 = 2$ y $\lambda_2 = -2$ con multiplicidad $m_2 = 1$.

El subespacio propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 0$ es $\mathrm{Ker}(h)$, que tiene dimensión $d_1 = 2$ y así $d_1 = m_1$. Como $m_2 = 1$, se tiene además que $d_2 = m_2$. Concluimos que h es diagonalizable.

Conocemos una base de $V_{\lambda_1} = \mathrm{Ker}(h)$, obtenemos a continuación una base de V_{λ_2}. El subespacio propio asociado a $\lambda_2 = -2$ tiene por ecuaciones cartesianas en la base B'

$$\begin{cases} 2y_1 + 5y_3 = 0 \\ 2y_2 + 3y_3 = 0 \end{cases}.$$

Las ecuaciones paramétricas de V_{λ_2} en la base B' son

$$(y_1, y_2, y_3) = (5a, 3a, -2a), \ \forall a \in \mathbb{R}.$$

El vector $v = (0,3,1)$ tiene coordenadas $(5,3,-2)_{B'}$ y por tanto $\{v\}$ es una base de V_{λ_2}.

11. Sea $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo con matriz asociada $A = M_h(B)$ en la base canónica B de $\mathbb{R}^3$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un endomorfismo con $M_f(B) = A - I_3$. Se sabe que:

(a) Una base del núcleo de f está formada por los vectores $u = (1, 1, 0)$ y $v = (1, 0, 1)$.

(b) $h(0, 2, 1) = (1, 1, 0)$.

Determinar los valores propios de h y una base de cada subespacio propio de h.

Solución

Obsérvese que $f = h - id_{\mathbb{R}^3}$. Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

tenemos una base $B' = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 2, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Por otra parte

$$f(0, 2, 1) = h(0, 2, 1) - id_{\mathbb{R}^3}(0, 2, 1) = (1, 1, 0) - (0, 2, 1) = (1, -1, -1)$$

cuyas coordenadas son $(1, 0, -1)_{B'}$ en la base B'. Por tanto

$$M_f(B') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

cuyo polinomio característico es $\lambda^2(-1 - \lambda)$. Así, los valores propios de f son $\mu_1 = 0$ con multiplicidad $m_1 = 2$ y $\mu_2 = -1$ con multiplicidad $m_2 = 1$. El ejercicio 6 nos permite afirmar que los valores propios de $h = f + id_{\mathbb{R}^3}$ son

$\lambda_1 = \mu_1 + 1 = 1$ con multiplicidad $m_1 = 2$ y $\lambda_2 = \mu_2 + 1 = 0$ con multiplicidad $m_2 = 1$.

Además, tenemos que $V_{\mu_i} = V_{\lambda_i}$, $i = 1, 2$ ya que

$$V_{\mu_i} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = \mu_i v\} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid (f+id_{\mathbb{R}^3})(v) = (\mu_i+1)v = \lambda_i v\} = V_{\lambda_i}.$$

Como $V_{\mu_1} = Ker(h)$ la base de V_{λ_1} es $B_{V_{\lambda_1}} = \{u, v\}$.

Las coordenadas (y_1, y_2, y_3) de los vectores de V_{μ_2} en la base B' verifican

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones cartesianas de V_{μ_2} son $y_1 = 0$ y $y_2 = 0$ y así una base de V_{μ_2} es $B_{V_{\lambda_2}} = \{w\}$ siendo w el vector de coordenadas $(0, 0, 1)_{B'}$ por tanto $w = (0, 2, 1)$.

12. Se considera el endomorfismo $h_a : V \longrightarrow V$ cuya matriz asociada en la base B de V es $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$. Estudiar para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ el endomorfismo h_a es diagonalizable.

Solución

El polinomio característico de h_a es $\det(A - \lambda I_3) = \lambda^3 - 3\lambda^2 a + 3\lambda a^2 - 3\lambda - a^3 + 3a - 2$ y las soluciones de la ecuación característica son $\lambda_1 = a + 2$ con multiplicidad $m_1 = 1$ y $\lambda_2 = a - 1$ con multiplicidad $m_2 = 2$. Como

$$\text{rango}(A - (a+2)I_3) = \text{rango} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

y

$$\mathrm{rango}(A-(a-1)I_3) = \mathrm{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

se tiene que $d_1 = 3 - 2 = 1$ y $d_2 = 3 - 1 = 2$. Por tanto h_a es diagonalizable para todo valor de a.

Bibliografía

[1] J. de Burgos, *Álgebra Lineal y Geometría Cartesiana.* McGraw-Hill, 1999.

[2] M. Castellet, I. Llerena, *Álgebra Lineal y Geometría.* Ed. Reverté, 1994.

[3] D.C. Lay, *Linear Algebra and Its Applications*, 3ª edición. Addison Wesley, 2003.

[4] J.L. Pinilla, *Lecciones de Álgebra Lineal.* Varicop, 1970.

NOTAS

NOTAS

NOTAS

CUADERNO

270.01

CATÁLOGO Y PEDIDOS EN

cuadernos.ijh@gmail.com

info@mairea-libros.com

ISBN 978-84-9728-287-1

